5 Preuves pour le chapitre 5

5.1 Proposition 1

Rappelons que
$$p(X) = \frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{T(X^{\sigma_b}) \geq T(X)\right\}\right),$$
pour $\sigma_1, \ldots, \sigma_B$ i.i.d. uniformes sur $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma_0 = id$. De plus, nous nous plaçons sous H_0, ce qui signifie que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sont i.i.d. Posons $Y_b = T(X^{\sigma_b})$, $b = 0, \ldots, B$, de sorte que
$$p(X) = \frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_0\right\}\right).$$

Le point clé est de montrer que le vecteur $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_B)$ est échangeable. Pour cela, on remarque que, pour tout σ tiré indépendamment et uniformément sur $\mathfrak{S}_n$, on a $X \sim X^\sigma$ (car cela est vrai conditionnellement à σ) et donc
$$\begin{aligned}
(Y_0, Y_1, \ldots, Y_B) &= (T(X^{\sigma_0}), T(X^{\sigma_1}), \ldots, T(X^{\sigma_B})) \\
&\sim (T((X^\sigma)^{\sigma_0}), T((X^\sigma)^{\sigma_1}), \ldots, T((X^\sigma)^{\sigma_B})) \\
&= (T(X^{\sigma_0 \circ \sigma}), T(X^{\sigma_1 \circ \sigma}), \ldots, T(X^{\sigma_B \circ \sigma})),
\end{aligned}$$
car l'égalité en loi est vrai conditionnellement à $\sigma_1, \ldots, \sigma_B$. A présent, nous travaillons conditionnellement à X, ce qui signifie que l'on s'intéresse à la loi du vecteur
$$(\sigma_0 \circ \sigma, \sigma_1 \circ \sigma, \ldots, \sigma_B \circ \sigma) = (\sigma, \sigma_1 \circ \sigma, \ldots, \sigma_B \circ \sigma)$$
Montrons qu'il s'agit de la même loi que $(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B)$, c'est-à-dire que ces variables sont i.i.d. et uniformes sur $\mathfrak{S}_n$. Pour toute fonction Ψ mesurable positive, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi(\sigma, \sigma_1 \circ \sigma, \ldots, \sigma_B \circ \sigma)\right] &= \sum_{u, u_1, \ldots, u_B \in \mathfrak{S}_n} \Psi(u, u_1 \circ u, \ldots, u_B \circ u)\, \mathbb{P}((\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B) = (u, u_1, \ldots, u_B)) \\
&= \sum_{u, u_1, \ldots, u_B \in \mathfrak{S}_n} \Psi(u, u_1 \circ u, \ldots, u_B \circ u)\, \mathbb{P}((\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B) = (u, u_1 \circ u, \ldots, u_B \circ u))
\end{aligned}$$
car on a
$$\mathbb{P}((\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B) = (u, u_1, \ldots, u_B)) = \mathbb{P}(\sigma = u) \prod_{b=1}^{B} \mathbb{P}(\sigma_b = u_b) = \frac{1}{(n!)^{B+1}} = \mathbb{P}((\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B) = (u, u_1 \circ u, \ldots, u_B \circ u)).$$
En utilisant que $v \in \mathfrak{S} \mapsto v \circ u \in \mathfrak{S}$ est une bijection, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi(\sigma, \sigma_1 \circ \sigma, \ldots, \sigma_B \circ \sigma)\right] &= \sum_{u, u'_1, \ldots, u'_B \in \mathfrak{S}_n} \Psi(u, u'_1, \ldots, u'_B)\, \mathbb{P}((\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B) = (u, u'_1, \ldots, u'_B)) \\
&= \mathbb{E}\left[\Psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B)\right].
\end{aligned}$$
Nous avons donc prouvé que
$$(Y_0, Y_1, \ldots, Y_B) \sim (T(X^\sigma), T(X^{\sigma_1}), \ldots, T(X^{\sigma_B})).$$
Or, ce dernier possède une loi échangeable, car $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_B$ le sont, en tant que vecteur i.i.d. Ainsi, $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_B)$ est un vecteur de loi échangeable.

On conclut en utilisant le lemme suivant :

Pour $\alpha \in]0,1[$ et un vecteur $(Y_0, Y_1, \dots, Y_B)$ échangeable, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_0\right\}\right) \leq \alpha\right) \leq \alpha.$$

Ce lemme se prouve de la façon suivante : soit U une variable uniformément distribuée sur $\{0,\dots,B\}$. Comme pour tout j, on a $\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\{Y_b \geq Y_0\} \sim \sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\{Y_b \geq Y_j\}$ (on permute j avec 0), on a aussi

$$\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_0\right\} \sim \sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_U\right\}.$$

On considère à présent une permutation τ de $\{0,\dots,B\}$ (indépendante de U) réalisant $Y_{\tau(1)} \geq \dots \geq Y_{\tau(B)}$. On a

$$\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_U\right\} = \sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_{\tau(b)} \geq Y_U\right\} \sim \sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_{\tau(b)} \geq Y_{\tau(U)}\right\},$$

car U et $\tau(U)$ ont la même loi conditionnellement à Y. Ainsi, comme $b \leq U$ implique $Y_{\tau(b)} \geq Y_{\tau(U)}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_b \geq Y_0\right\}\right) \leq \alpha\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{Y_{\tau(b)} \geq Y_{\tau(U)}\right\}\right) \leq \alpha\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{B+1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{b \leq U\right\}\right) \leq \alpha\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U \leq \alpha(B+1)\right) = \frac{\lfloor \alpha(B+1) \rfloor}{B+1} \leq \alpha.
\end{aligned}$$

5.2 Théorème 1

C'est la même preuve que d'habitude :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists j \in \mathcal{H}_0 \;:\; j \in R) &= \mathbb{P}(\exists j \in \mathcal{H}_0 \;:\; p(X_j) \leq \alpha/m) \\
&\leq \sum_{j \in \mathcal{H}_0} \mathbb{P}(p(X_j) \leq \alpha/m) \\
&\leq |\mathcal{H}_0|\, \alpha/m,
\end{aligned}$$

car lorsque $H_{0,j}$ est vraie, $\mathbb{P}(p(X_j) \leq t) \leq t$ d'après la proposition précédente.

5.3 Théorème 2

Notons $\Psi(x) = \sup_{j \in \mathcal{H}_0} \{T(x_j)\}$ pour faire court. Cette dernière n'est d'ailleurs qu'une fonction de $(x_j)_{j \in \mathcal{H}_0}$. Remarquons que $s_\alpha(X) \geq s^\star_\alpha(X)$, donné par

$$\begin{aligned}
s^\star_\alpha(X) &= \min\left\{x \in \mathbb{R} \;:\; (B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\sup_{j \in \mathcal{H}_0} \{T(X_j^{\sigma_b})\} > x\right\}\right) \leq \alpha\right\} \\
&= \min\left\{x \in \mathbb{R} \;:\; (B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\Psi(X^{\sigma_b}) > x\right\}\right) \leq \alpha\right\}
\end{aligned}$$

Notons que cette dernière quantité ne dépend de X qu'à travers $(X_j)_{j \in \mathcal{H}_0}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{FWER}(P, R^{maxT}) = \mathbb{P}(\exists j \in \mathcal{H}_0 \;:\; j \in R^{maxT}) &= \mathbb{P}\left(\sup_{j \in \mathcal{H}_0} \{T(X_j)\} > s_\alpha(X)\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Psi(X) > s^\star_\alpha(X)\right).
\end{aligned}$$

Comme $s^\star_\alpha(X)$ est tel que

$$(B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\Psi(X^{\sigma_b}) > s^\star_\alpha(X)\right\}\right) \le \alpha,$$

sur l'événement $\{\Psi(X) > s^\star_\alpha(X)\}$, on a

$$(B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\Psi(X^{\sigma_b}) \ge \Psi(X)\right\}\right) \le (B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\Psi(X^{\sigma_b}) > s^\star_\alpha(X)\right\}\right) \le \alpha.$$

Ceci donne

$$\mathrm{FWER}(P, R^{maxT}) \le \mathbb{P}\left((B+1)^{-1}\left(\sum_{b=0}^{B} \mathbb{1}\left\{\Psi(X^{\sigma_b}) \ge \Psi(X)\right\}\right) \le \alpha\right).$$

On reconnait exactement la même forme de probabilité que celle pour le cas d'un seul test par permutation ! On peut finir la preuve exactement de la même manière en remarquant que le vecteur

$$(\Psi(X^{\sigma_b}), b = 0, \dots, B)$$

est échangeable car la sous-matrice $(X_{i,j})_{1\le i\le n, j\in\mathcal{H}_0}$ possède des lignes i.i.d. de loi $Q_{|\mathcal{H}_0}$ et donc possède une loi invariante par permutation des lignes.